CONCEPTOS FUNDAMENTALES

DE ÁLGEBRA

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS NÚMEROS REALES

Adición	**Multiplicación**
1. Propiedades de cerradura	
i) $a + b$ es un número real	*ii*) $a \cdot b$ es un número real
2. Propiedade conmutativas	
i) $a + b = b + a$	*ii*) $a \cdot b = b \cdot a$
3. Propiedade asociativas	
i) $a + (b + c) = (a + b) + c$	*ii*) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. Propiedades de identidad	
i) $a + 0 = 0 + a = a$	*ii*) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
5. Propiedades del inver	
i) $a + (-a) = (-a) + a = 0$	*ii*) $a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} \cdot a = 1$

Potencia entera positiva de *x*

Para cualquier número real x y cualquier entero positivo n, el símbolo x^n representa el producto de n factores de x. Es decir,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores de } x}.$$

Potencias enteras negativas de *x*

Para cualquier número real x que no sea cero y cualquier entero positivo n, el símbolo x^{-n} representa el recíproco del producto de n factores de x. Es decir,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{con } x \neq 0.$$

$$x^m x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m \text{ factores}} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ factores}} = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m+n \text{ factores}} = x^{m+n}.$$

$$x^m x^n = x^m x^{-q} = \frac{x^m}{x^q} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m \text{ factores}}}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{q \text{ factores}}}.$$

Leyes de los exponentes enteros

Sean x y y números reales enteros y m y n enteros. Entonces,

i) $x^m x^n = x^{m+n}$ *ii*) $(x^m)^n = x^{mn}$ *iii*) $(xy)^n = x^n y^n$

iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ *v*) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

siempre que cada expresión representa un número real.

Leyes de los radicales

Sean m y n enteros positivos, y x y y números reales. Entonces,

i) $(\sqrt[n]{x})^n = x$ *ii*) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & \text{si } n \text{ es impar} \\ |x| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

iii) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$ *iv*) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

v) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

siempre que los radicales representen números reales.

Potencia racional de x

Supóngase que x es un número real y que $n \geq 2$ es un número entero positivo.

i) Si $\sqrt[n]{x}$ existe, entonces

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

ii) S $\sqrt[n]{x}$ existe y m es cualquier entero tal que m/n está en sus términos mínimos, entonces

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m.$$

Leyes de los exponentes racionales

Sean x y y números reales y s y r números racionales. Entonces,

i) $x^r x^s = x^{r+s}$ *ii*) $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$ *iii*) $(xy)^r = x^r y^r$

iv) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$ *v*) $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

siempre que todas las expresiones representen números reales.

Polinomio

Un **polinomio de grado *n* en la variable *x*** es cualquier expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad \text{con } a_n \neq 0,$$

donde n es un entero no negativo y a_i, $i = 0, 1\ldots, n$ son números reales.

Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0 (con $a_0 \neq 0$)	5
Lineal	1	$a_1x + a_0$ (con $a_1 \neq 0$)	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_2 \neq 0$)	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_3 \neq 0$)	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ (con $a_n \neq 0$)	$x^n - 1$

Productos notables Ciertos productos de binomios se presentan con tanta frecuencia que debe aprender a reconocerlos. Empezamos con el producto de dos binomios $ax + b$ y $cx + d$:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Algunos polinomios pueden expresarse como una potencia entera positiva de un binomio. El **cuadrado** y el **cubo** de un binomio $x + a$ son, respectivamente:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

y

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$